

# Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики

Экономичными разностными схемами называют схемы, сочетающие в себе лучшие качества явной и неявной схем. Они являются:

- 1) безусловно устойчивыми (как неявная схема);
- 2) требующими при переходе со слоя на слой затраты числа арифметических операций  $Q$ , пропорционального числу узлов сетки  $\omega_h$ , так что  $Q = O(1/h^p)$ , где  $p$  — размерность области, а  $h = \min_{1 \leq i \leq p} h_i$  (как для явной схемы). На один узел сетки приходится число действий, не зависящее от числа узлов.

## 1 Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема) для уравнения теплопроводности

### 1.1 Структура схемы

Рассмотрим задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольной области:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), & x \in G, \quad t \in (0, T], \\ u(x, t) = \mu(x, t), & x \in \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$L = \Delta = L_1 + L_2, \quad L_\alpha \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2;$$
$$\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}, \quad \bar{G} = G + \Gamma.$$

Введем в области  $\bar{G}$  равномерную сетку

$$\bar{\omega}_{h_1 h_2} = \omega_{h_1 h_2} + \gamma_{h_1 h_2} \equiv \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h = \{(h_1 i_1, h_2 i_2), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Заменим операторы  $L_\alpha$  их разностными аналогами  $\Lambda_\alpha$ , где  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Пусть  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ .

В случае одномерного уравнения теплопроводности безусловно устойчивая неявная схема на каждом шаге приводит к разностной краевой задаче:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \mu_1, & y_N = \mu_2, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $A_i > 0$ ,  $B_i > 0$ ,  $C_i \geq A_i + B_i$ , которая решается методом прогонки с затратой числа действий  $Q = O(1/h) = O(N)$ , где  $N$  — число узлов сетки  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$ .

Основная идея большинства экономичных схем состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач вида (1.2) по каждому из координатных направлений, для чего понадобится число арифметических действий, пропорциональное числу узлов многомерной пространственной сетки ( $Q = O(N_1 N_2 \dots N_p)$ ). Эту идею выражает предложенная в 1955 году Писменом и Рекфордом, а также Дугласом, схема переменных направлений (продольно-поперечная схема) для двумерного уравнения теплопроводности (в прямоугольной области с условиями Дирихле на границе):

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h;$$

$$\begin{cases} \frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^s}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^s + \varphi^s, & x \in \omega_h, \\ y^{s+\frac{1}{2}} = \bar{\mu}, & x \in \gamma_h; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{s+1} + \varphi^s, & x \in \omega_h, \\ y^{s+1} = \mu^{s+1}, & x \in \gamma_h; \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} (\mu^s + \mu^{s+1}) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\mu^{s+1} - \mu^s), \quad \varphi^s = \bar{f} = f^{s+\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

Основная идея состоит в том, что вводится промежуточное значение  $\bar{y} = y^{s+\frac{1}{2}}$ , которое можно формально рассматривать как значение  $y$  при  $t = t_{s+1/2} = t_s + \frac{\tau}{2}$ . Если значение  $y^s$  на  $s$ -м слое известно, то сначала решается задача (1.3) и находится вспомогательное значение  $y^{s+\frac{1}{2}}$ . Когда оно найдено, решаем задачу (1.4) и находим решение на новом слое  $s+1$ .

Схема (1.3) неявна по направлению  $x_1$  и явна по направлению  $x_2$ :

$$\frac{2}{\tau} \bar{y} - \Lambda_1 \bar{y} = F, \quad F = \frac{2}{\tau} y + \Lambda_2 y + \varphi.$$

Схема (1.4) наоборот явна по направлению  $x_1$  и неявна по направлению  $x_2$ :

$$\frac{2}{\tau} \hat{y} - \Lambda_2 \hat{y} = \bar{F}, \quad \bar{F} = \frac{2}{\tau} \bar{y} + \Lambda_1 \bar{y} + \varphi,$$

где  $\hat{y} = y^{s+1}$ .

Распишем схемы (1.3) и (1.4) в явном виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{i_1-1, i_2} - 2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} \right) \bar{y}_{i_1, i_2} + \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{i_1+1, i_2} = -F_{i_1, i_2}, & i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ \bar{y} = \bar{\mu}, & i_1 = 0 \text{ и } i_1 = N_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

при всех  $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ ;

$$\begin{cases} \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{i_1, i_2-1} - 2 \left( \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau} \right) \hat{y}_{i_1, i_2} + \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{i_1, i_2+1} = -\bar{F}_{i_1, i_2}, & i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ \hat{y} = \hat{\mu}, & i_2 = 0 \text{ и } i_2 = N_2 \end{cases} \quad (1.7)$$

при всех  $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ .

Если  $y = y^s$  известно, то вычисляем  $F$ , а затем методом прогонки вдоль всех строк  $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$  решаем задачу (1.6) и определяем  $\bar{y}$  во всех узлах  $\omega_h$ . Найдя  $\bar{y}$ , вычисляем  $\bar{F}$  и решаем методом прогонки задачу (1.7) вдоль всех столбцов  $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ . В результате находим  $\hat{y} = y^{s+1}$  на  $\omega_h$ , тем самым завершая переход  $s \rightarrow s+1$ . Далее процесс повторяется для перехода  $s+1 \rightarrow s+2$  и т.д., то есть все время происходит чередование направлений. Поскольку прогонка требует на один узел сетки числа действий, не зависящего от шага сетки, то данный алгоритм будет экономичным при условии абсолютной устойчивости схемы (1.3)-(1.4).

## 1.2 Устойчивость

Выразим промежуточное значение  $\bar{y}$  через  $y$  и  $\hat{y}$ . Для этого вычтем из уравнения (1.3) уравнение (1.4):

$$2\bar{y} = \hat{y} + y - 0.5\tau\Lambda_2(\hat{y} - y), \quad x \in \omega_h. \quad (1.8)$$

Равенство (1.8) должно выполняться, в частности, при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = l_1$ , так как в противном случае выражение  $(\Lambda_1 \bar{y})_{i_1}$  не определено при  $i_1 = 1$  и  $i_1 = N_1 - 1$ . Так как  $y = \mu$  и  $\hat{y} = \hat{\mu}$  при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = l_1$ , то из (1.8) получаем:

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + \mu) - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_2\mu_t = \bar{\mu}, \quad x_1 = 0, \quad x_1 = l_1.$$

Это выражение совпадает с (1.5).

Подставляя выражение (1.8) в уравнение (1.3), получаем:

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_2(\hat{y} - y) = \frac{1}{2}\Lambda_1(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(\hat{y} - y) + \Lambda_2 y + \varphi,$$

или же в каноническом виде:

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)y_t = \Lambda y + \varphi. \quad (1.9)$$

Итак, решение задачи (1.3)-(1.4) удовлетворяет (1.9). С другой стороны, решение (1.9), удовлетворяющее условиям:

$$\hat{y}|_{\gamma_h} = \hat{\mu}, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad (1.10)$$

является также решение задачи (1.3)-(1.4). В самом деле, если ввести  $\bar{y}$  по формуле (1.8), то

$$(E - 0.5\tau\Lambda_2)\hat{y} = 2\bar{y} - (E + 0.5\Lambda_2)y.$$

Подставляя это выражение в (1.9), получим уравнение (1.3). Из уравнения (1.3) и равенства (1.8) следует уравнение (1.4). Таким образом, задачи (1.3)-(1.4) и (1.9)-(1.10) эквивалентны.

Исследование схемы (1.9) на устойчивость проведем с помощью общей теории операторно-разностных схем. Пусть  $\hat{\mu} = \bar{\mu} = 0$ . Введем пространство  $H = \dot{\Omega}_h$  сеточных функций, обращающихся в ноль на  $\gamma_h$ , скалярное произведение в котором имеет вид:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)v(x)h_1h_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y_{i_1, i_2} v_{i_1, i_2} h_1 h_2.$$

Норма в  $H$  определяется как

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Оператор  $A = -\Lambda = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$  самосопряжен и положительно определен в  $H$ . Будем использовать норму энергетического пространства  $H_A$ , которую с помощью формулы Грина можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \|y\|_A^2 = (Ay, y) &= \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1}(i_1h_1, i_2h_2))^2 h_1h_2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (y_{\bar{x}_2}(i_1h_1, i_2h_2))^2 h_1h_2 = \\ &= \|y_{x_1}\|_1^2 + \|y_{x_2}\|_2^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Рассматривая  $y = y(t)$  как абстрактную функцию аргумента  $t \in \omega_\tau$  со значениями в  $H$ , запишем (1.9) в виде:

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi(t), & 0 < t = j\tau < T; \\ y(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.12)$$

где

$$B = (E + 0.5\tau A_1)(E + 0.5\tau A_2), \quad A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad A = A_1 + A_2.$$

Операторы  $A_1$  и  $A_2$  самосопряженные, положительно определенные и перестановочные, так как в случае, когда  $G$  — прямоугольник, имеет место равенство:

$$A_1 A_2 y = A_2 A_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}.$$

Следовательно, оператор  $A_1 A_2$  также является самосопряженным положительно определенным оператором. Но тогда:

$$B - 0.5\tau A = \left( E + \frac{\tau}{2}A + \frac{\tau^2}{4}A_1 A_2 \right) - \frac{\tau}{2}A = E + \frac{\tau^2}{4}A_1 A_2 > E,$$

то есть критерий Самарского устойчивости схемы (1.12) по начальным данным выполнен. Более того, для схемы (1.12) выполнены требования теоремы 2.10 главы «Классы устойчивости двухслойных схем»:

$$B \geq \varepsilon E + 0.5\tau A \Rightarrow \|y(t + \tau)\|_A^2 \leq \|y(0)\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2$$

при  $\varepsilon = 1$ . Следовательно, схема (1.12) устойчива и по правой части.

**Теорема 1.1** *Схема переменных направлений устойчива по начальным данным и правой части. Для решения задачи (1.3)-(1.4) справедлива априорная оценка:*

$$\|y(t + \tau)\|_A^2 \leq \|y(0)\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2.$$

### 1.3 Сходимость и точность схемы переменных направлений

Пусть  $u$  — решение задачи (1.1),  $y$  — решение задачи (1.3)-(1.4). Подставляя  $y = z + u$ , где  $z$  — погрешность, в уравнение (1.12), получим:

$$\begin{cases} Bz_t = \Lambda z + \psi, & x \in \omega_h, \quad 0 < t = j\tau < T, \\ z = 0, & x \in \gamma_h, \\ z(x, 0) = 0, \end{cases}$$

где  $\psi$  — погрешность аппроксимации на решении. Так как

$$B = (E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2),$$

то

$$\psi = \varphi + \Lambda u - Bu_t = \varphi + 0.5\Lambda(\hat{u} + u) - u_t - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2u_t.$$

Пусть существует число  $M > 0$ , такое что:

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right| \leq M \quad (1.13)$$

при  $(x, t) \in \overline{Q_T} = \overline{G} \times [0, T]$ . Тогда:

$$0.5(\hat{u} + u) = \bar{u} + O(\tau^2), \quad \bar{u} = u(x, t_j + 0.5\tau), \quad u_t = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + O(\tau^2),$$

выражение  $\Lambda_1 \Lambda_2 u_t$  ограничено. Следовательно,

$$\psi = L\bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{f} + O(\tau^2 + |h|^2) = O(\tau^2 + |h|^2).$$

Итак, схема (1.3)-(1.4) имеет второй порядок аппроксимации по координатам и времени. Так как она линейна, то из аппроксимации и устойчивости следует ее сходимость.

**Теорема 1.2** *Если выполнены условия (1.13), то схема (1.3)-(1.4) сходится в сеточной норме (1.11) со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ .*

## 2 Понятие об экономичных факторизованных схемах

Рассмотрим двухслойную операторно-разностную схему

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi, & 0 < t = j\tau < T, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Пусть  $y = y^j$  известно. Для  $\hat{y} = y^{j+1}$  получаем уравнение:

$$By^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A)y^j + \tau \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (2.2)$$

где  $F^j$  известно. Пусть для вычисления  $F^j$  затрачивается число действий  $Q = O(N)$ , где  $N$  — число узлов пространственной сетки на одном слое по времени. Если для решения уравнения (2.2) затрачивается число действий  $Q = O(N)$ , то устойчивая схема (2.1) экономична.

Пусть  $B_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  — экономичные операторы, то есть для вычисления решения уравнения

$$B_\alpha v = F$$

требуется  $Q = O(N)$  действий. Тогда схема (2.1) с факторизованным оператором

$$B = B_1 B_2 \dots B_p$$

будет также экономичной, так как для ее решения потребуется  $Q = O(N)$  действий. В самом деле:

$$B_1 \underbrace{B_2 \dots B_p}_{y_{(1)}} y^{j+1} = F^j \Rightarrow B_1 y_{(1)} = F^j, \quad B_\alpha y_\alpha = y_{\alpha-1}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p.$$

При этом  $y^{j+1} = y_{(p)}$ . Вспомогательные значения  $y_{(1)}, \dots, y_{(p-1)}$  можно понимать как решения на промежуточных слоях по времени:

$$y_{(1)} = y^{j+\frac{1}{p}}, \quad \dots, \quad y_{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \dots, \quad y_{(p-1)} = y^{j+\frac{p-1}{p}}.$$

**Определение 2.1** *Схемы с факторизованным оператором  $B$  называются факторизованными схемами.*

Устойчивая схема (2.1) с факторизованным оператором  $B$ , являющимся произведением конечного числа экономичных операторов  $B_1, B_2, \dots, B_p$ , является экономичной.

Схема переменных направлений эквивалентна факторизованной схеме с оператором  $B = B_1 B_2$ , где

$$B_\alpha = (E - 0.5\tau\Lambda_\alpha), \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Первые экономичные схемы составлялись так, чтобы можно было легко исключить промежуточные значения. Это приводило к факторизованной схеме «в целых шагах», связывающей значения  $y^j$  и  $y^{j+1}$ .

Факторизованные схемы применимы лишь для прямоугольных областей. Исключение представляет лишь случай, когда  $B = B_1 B_2$ :

$$B_n = E + \tau R_n, \quad n = 1, 2,$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — треугольные операторы:

$$R_1 y = \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{\bar{x}_\alpha}}{h_\alpha}, \quad R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha},$$

однако в этом случае понижается порядок аппроксимации, которая имеет место лишь при  $\tau = O(|h|^2)$ . Соответствующие треугольным операторам  $R_1$  и  $R_2$  матрицы являются треугольными. Операторы  $R_1$  и  $R_2$  не являются самосопряженными, но сопряжены друг к другу.

Факторизованная схема с треугольными операторами называется явной схемой переменных направлений. Для решения уравнения

$$B_n v = F$$

в этом случае получаются формулы явного (бегущего) счета.

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u, \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p$$

в  $p$ -мерном параллелепипеде  $\bar{G}$  имеется ряд двухслойных схем типа «предиктор-корректор». При изучении устойчивости эти схемы сводятся к эквивалентным факторизованным схемам.

*Первая схема предиктор-корректор.*

$$\begin{aligned} \frac{y(1) - y}{0.5\tau} &= \Lambda_1 y(1) + (\Lambda_2 + \Lambda_3)y, & \frac{y(2) - y(1)}{0.5\tau} &= \Lambda_2(y(2) - y), \\ \frac{y(3) - y(2)}{0.5\tau} &= \Lambda_3(y(3) - y), & \frac{\hat{y} - y}{\tau} &= \Lambda_1 y(1) + \Lambda_2 y(2) + \Lambda_3 y(3), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $y = y^j$ ,  $\hat{y} = y^{j+1}$ ,  $y_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  — промежуточные значения,  $y \in \dot{\Omega}(\bar{G})$ ,  $\bar{G}$  — трехмерный параллелепипед. Эквивалентная факторизованная двухслойная схема имеет вид:

$$B y_t = \Lambda y, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha},$$

где

$$B = (E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)(E - 0.5\tau\Lambda_3).$$

Введем обозначения:

$$B_{\alpha} = (E - 0.5\tau\Lambda_{\alpha}), \quad w_{(\alpha)} = \frac{y_{(\alpha)} - y}{0.5\tau} \Rightarrow y_{(\alpha)} = y + 0.5\tau w_{(\alpha)}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{y(1) - y}{0.5\tau} &= \Lambda_1 y(1) + (\Lambda_2 + \Lambda_3)y \Rightarrow w_{(1)} = 0.5\tau\Lambda_1 w_{(1)} + \Lambda y \Rightarrow B_1 w_{(1)} = \Lambda y; \\ \frac{y(2) - y(1)}{0.5\tau} &= \Lambda_2(y(2) - y) \Rightarrow w_{(2)} - w_{(1)} = 0.5\tau\Lambda_2 w_{(2)} \Rightarrow B_2 w_{(2)} = w_{(1)}; \\ \frac{y(3) - y(2)}{0.5\tau} &= \Lambda_3(y(3) - y) \Rightarrow w_{(3)} - w_{(2)} = 0.5\tau\Lambda_3 w_{(3)} \Rightarrow B_3 w_{(3)} = w_{(2)}. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\Lambda y = B_1 w_{(1)} = B_1 B_2 w_{(2)} = B_1 B_2 B_3 w_{(3)},$$

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} = \Lambda_1 y(1) + \Lambda_2 y(2) + \Lambda_3 y(3) \Rightarrow y_t = \Lambda y + 0.5\tau \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\alpha} w_{(\alpha)}.$$

Рассмотрим выражение:

$$0.5\tau \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\alpha} w_{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^3 (E - B_{\alpha}) w_{(\alpha)} =$$



$$= (E - B_1)B_2B_3w_{(3)} + (E - B_2)B_3w_{(3)} + (E - B_3)w_{(3)} = w_{(3)} - \Lambda y.$$

Следовательно,

$$y_t = w_{(3)} \Rightarrow By_t = Bw_{(3)} = \Lambda y \Rightarrow By_t = \Lambda y.$$

Положим

$$A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad A = -\Lambda = \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha.$$

В результате приходим к операторно-разностной схеме:

$$By_t + Ay = 0, \quad B = B_1B_2B_3, \quad B_\alpha = E + \frac{\tau}{2}A_\alpha.$$

Достаточное условие устойчивости (критерий Самарского) для нее выполнено. В самом деле,

$$B = \prod_{\alpha=1}^3 \left( E + \frac{\tau}{2}A_\alpha \right) = E + \frac{\tau}{2}A + \frac{\tau^2}{4}Q,$$

где

$$Q = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 + \frac{\tau}{2}A_1A_2A_3.$$

Так как операторы  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , самосопряженные, положительно определенные и попарно перестановочные, то  $Q > 0$ . Следовательно,

$$B > E + \frac{\tau}{2}A > \frac{\tau}{2}A,$$

то есть схема (2.3) безусловно устойчива (по норме  $\|\cdot\|_A$ ).

*Вторая схема предиктор-корректор.*

$$\begin{aligned} \frac{y_{(1)} - y}{0.5\tau} &= \Lambda_1 y_{(1)}, & \frac{y_{(2)} - y_{(1)}}{0.5\tau} &= \Lambda_2 y_{(2)}, \\ \frac{y_{(3)} - y_{(2)}}{0.5\tau} &= \Lambda_3 y_{(3)}, & \frac{\hat{y} - y}{\tau} &= \Lambda y_{(3)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть  $B_\alpha = E - \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Тогда

$$B_1y_{(1)} = y, \quad B_2y_{(2)} = y_{(1)}, \quad B_3y_{(3)} = y_{(2)} \Rightarrow B_1B_2B_3y_{(3)} = y.$$

Применяя к уравнению  $\frac{\hat{y} - y}{\tau} = \Lambda y_{(3)}$  оператор  $B = B_1B_2B_3$  и учитывая его перестановочность с оператором  $\Lambda$ , получаем факторизованную схему

$$By_t = \Lambda y,$$

совпадающую со схемой, к которой сводится первая схема предиктор-корректор.

Мы ввели понятие факторизованной схемы для двухслойных схем. Рассмотрим теперь трехслойную схему:

$$By_i + \tau^2 Ry_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad (2.5)$$

или, что то же самое:

$$B \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} + R(\hat{y} - 2y + \check{y}) + Ay = \varphi, \quad (2.6)$$

где  $\hat{y} = y^{j+1}$ ,  $y = y^j$ ,  $\check{y} = y^{j-1}$ . После приведения подобных уравнение (2.6) принимает вид:

$$(B + 2\tau R)\hat{y} + 2\tau(A - 2R)y - (B - 2\tau R)\check{y} = 2\tau\varphi.$$

Трехслойная схема (2.5) называется факторизованной, если факторизован оператор  $(B + 2\tau R)$ .

## 3 Метод суммарной аппроксимации

### 3.1 Суммарная аппроксимация

Продольно-поперечная схема не допускает непосредственного обобщения на случай трех и большего числа измерений, а также на случай параболических уравнений общего вида. Экономичные факторизованные схемы применимы в предположении, что область  $G$  изменения аргумента  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  есть параллелепипед. Общим методом получения экономичных схем, пригодных для уравнений с переменными и даже разрывными коэффициентами, для квазилинейных нестационарных уравнений в случае произвольной области любого числа измерений является *метод суммарной аппроксимации*.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), & x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t > 0, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}u, \quad L_{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad k_{\alpha} \geq C > 0.$$

В случае, когда коэффициенты  $k_{\alpha}$  и функция  $f$  зависят также и от решения  $u(x, t)$ :

$$k_{\alpha} = k_{\alpha}(x, t, u), \quad f = f(x, t, u),$$

соответствующее уравнение теплопроводности называется квазилинейным.

Будем считать, что граница  $\Gamma$  области  $\bar{G} = G + \Gamma$  достаточно гладкая, так что обеспечивается необходимая гладкость решения.

Отход от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации расширяет класс задач и приводит к так называемым *аддитивным схемам*.

Аддитивные схемы имеют две основных черты:

- 1) переход от слоя  $j$  на слой  $j + 1$  осуществляется при помощи ряда вспомогательных (промежуточных) обычных (двухслойных, трехслойных и т.д.) схем;
- 2) погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем, то есть аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией.

Каждая из промежуточных схем цепочки может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок.

## 4 Сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач

Пусть оператор  $L$  таков, что его можно представить в виде суммы одномерных операторов:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_p.$$

Поставим в соответствие задаче (3.1) цепочку одномерных уравнений (первую цепочку). Для этого уравнение

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0$$

перепишем в виде:

$$\sum_{\alpha=1}^p P_\alpha u = 0, \quad P_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где  $f_\alpha(x, t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и  $f(x, t)$ , и удовлетворяющие условию:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На отрезке  $0 \leq t \leq T$  введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ . Каждый интервал  $[t_j, t_{j+1}]$  разобьем на  $p$  частей, вводя точки

$$t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1,$$

и обозначая  $\Delta_\alpha$  — полуинтервалы  $t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}$ .

Рассмотрим частный случай задачи с однородными граничными условиями:  $\mu(x, t) \equiv 0$ .

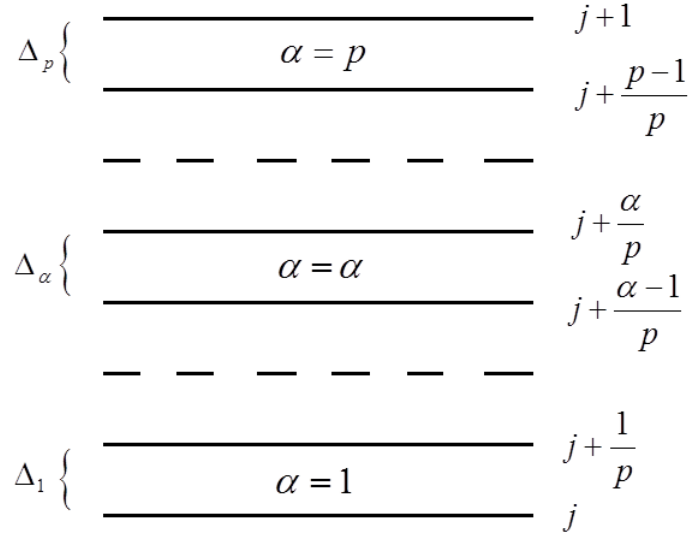


Рис. 1: Разбиение интервала  $[t_j, t_{j+1}]$  вспомогательными слоями

Будем последовательно, начиная с  $\alpha = 1$ , решать уравнения:

$$P_\alpha v_{(\alpha)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (4.1)$$

дополняя их начальными условиями:

$$v_{(1)}(x, t_j) = u(x, t_j), \quad v_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2, \dots, p. \quad (4.2)$$

При этом  $v_{(1)}(x, 0) = u_0(x)$ . Решением этой задачи назовем значения  $v(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ . Заметим, что  $u(x, t_j) = v(x, t_j)$ .

Каждое из уравнений

$$P_\alpha v_{(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (4.3)$$

заменяем разностной схемой

$$\Pi_\alpha y_{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (4.4)$$

где

$$y_{(1)}^j = y^j, \quad y_{(2)}^{j+\frac{1}{p}} = y_{(1)}^{j+\frac{1}{p}}, \quad \dots, \quad y_{(\alpha)}^{j+\frac{\alpha-1}{p}} = y_{(\alpha-1)}^{j+\frac{\alpha-1}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

В простейшем случае (4.4) — это двухслойная схема, связывающая значения  $y_{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$  и  $y_{(\alpha-1)} = y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}$ .

Схема (4.4) аппроксимирует уравнение (4.3) в обычном смысле, так что погрешность

$$\Psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}}$$

в некоторой норме стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$  и  $|h| \rightarrow 0$ .

Покажем, что система разностных уравнений (4.4) является аддитивной схемой, обладающей суммарной аппроксимацией. Пусть  $\psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ . Представляя  $\psi_\alpha$  в виде суммы:

$$\psi_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha$$

и учитывая, что

$$(P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau),$$

получаем

$$\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \quad \dot{\psi}_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}}, \quad \psi_\alpha^* = \Psi_\alpha + O(\tau),$$

причем  $\|\psi_\alpha^*\| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $|h| \rightarrow 0$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в пространстве сеточных функций, заданных на  $\omega_h$ , и

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} = (Pu)^{j+\frac{1}{2}} = 0.$$

Считая погрешностью аддитивной схемы (4.4) сумму невязок для всех промежуточных схем:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha,$$

получаем оценку:

$$\|\psi\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* \right\| \rightarrow 0$$

при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $|h| \rightarrow 0$ .

Таким образом, схема обладает суммарной аппроксимацией, если каждая из схем (4.4) аппроксимирует соответствующее уравнение (4.3) в обычном смысле. Вопрос о близости решения разностной задачи к решению исходной фактически сводится к вопросу о близости решения исходной задачи и решения  $v$  цепочки уравнений (4.1)-(4.2), так как

$$\|u^j - y^j\| \leq \|u^j - v_{(p)}^j\| + \|v_{(p)}^j - y^j\|.$$

Наряду с (4.1)-(4.2) можно рассматривать также вторую цепочку уравнений:

$$\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad x \in G, \quad t_j < t \leq t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (4.5)$$

при условиях сопряжения

$$v_{(1)}(x, t_j) = v(x, t_j), \quad v_{(\alpha)}(x, t_j) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, h, \quad (4.6)$$

причем  $v_{(1)}(x, 0) = u_0(x)$ .

Решением задачи (4.5)-(4.6) является функция  $v(x, t) = v_{(p)}(x, t)$ . В отличие от первой цепочки уравнений, в задаче (4.5)-(4.6) каждое из уравнений с номером  $\alpha$  решается на всем интервале  $t_j < t \leq t_{j+1}$ . Обе цепочки обладают свойством суммарной аппроксимации на решении  $u(x, t)$  исходной задачи (3.1).

Суммарная аппроксимация для (4.1)-(4.2) и (4.5)-(4.6) гарантируется выполнением двух условий:

- 1) оператор  $L$  есть сумма  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_p$ ;
- 2) правая часть  $f$  есть сумма  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$ .

Эти условия можно ослабить, положив:

$$Lu - \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u = O(\tau), \quad f - \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = O(\tau).$$

**Определение 4.1** Оператор  $L_\alpha$  называется одномерным, если  $L_\alpha$  содержит производные лишь по переменной  $x_\alpha$ . При этом уравнение  $P_\alpha v_{(\alpha)} = 0$  называется одномерным уравнением, а соответствующая аддитивная схема — локально-одномерной схемой.

## 4.1 Схема переменных направлений как аддитивная схема

Схема Писмена-Рекфорда:

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} &= 0.5 \left( \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j \right) + 0.5 \varphi^j, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} &= 0.5 \left( \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{j+1} \right) + 0.5 \varphi^j \end{aligned}$$

эквивалентна линейно-одномерной схеме следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+\frac{1}{4}} - y^j}{\tau} &= 0.5 \Lambda_2 y^j + 0.5 \varphi^j; & \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^{j+\frac{1}{4}}}{\tau} &= 0.5 \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}}; \\ \frac{y^{j+\frac{3}{4}} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} &= 0.5 \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}}; & \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{3}{4}}}{\tau} &= 0.5 \Lambda_2 y^{j+1} + 0.5 \varphi^j. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Введенные промежуточные значения  $y^{j+\frac{1}{4}}$  и  $y^{j+\frac{3}{4}}$  легко исключаются. Схема (4.7) обладает суммарной аппроксимацией:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = O(\tau^2 + |h|^2).$$

## 4.2 Схема Дугласа-Рекфорда

Схемой Дугласа-Рекфорда для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad L = L_1 + L_2$$

называется схема:

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j; \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{j+1} - y^j). \quad (4.8)$$

Покажем, что схема обладает суммарной аппроксимацией. Пусть  $u = u^j$  и  $\hat{u} = u^{j+1}$ . Вычисляя невязки:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \Lambda_1 u^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u - \frac{u^{j+\frac{1}{2}} - u^j}{\tau} = \Lambda_1 \frac{\hat{u} + u}{2} + \Lambda_2 u - \frac{\hat{u} - u}{2\tau} + O(\tau), \\ \psi_2 &= \Lambda_2 (\hat{u} - u) - \frac{u^{j+1} - u^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (\hat{u} - u) - \frac{\hat{u} - u}{2\tau} + O(\tau), \end{aligned}$$

с учетом того, что

$$u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\hat{u} + u}{2} + O(\tau^2),$$

получаем, что  $\psi_1 = O(1)$  и  $\psi_2 = O(1)$ , но

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 = \Lambda_1 \frac{\hat{u} + u}{2} + \Lambda_2 \hat{u} - \frac{\hat{u} - u}{\tau} + O(\tau) = \\ &= \Lambda \hat{u} - \frac{\hat{u} - u}{\tau} + O(\tau) = L\hat{u} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + O(|h|^2 + \tau) = O(\tau + |h|^2), \end{aligned}$$

если разностные операторы  $\Lambda_\alpha$  аппроксимируют дифференциальные операторы  $L_\alpha$  со вторым порядком. Таким образом, схема (4.8) обладает суммарной аппроксимацией.

Если в схеме Дугласа-Рекфорда исключить промежуточное значение  $y^{j+\frac{1}{2}}$ , то мы получим факторизованную схему, содержащую  $y^j$  и  $y^{j+1}$  и аппроксимирующую уравнение теплопроводности с порядком  $O(\tau + |h|^2)$  в обычном смысле.

## 5 Схема Кранка - Николсона

Схемой Кранка-Николсона для задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, & x \in G, \quad t \in (0, T]; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G} \end{cases} \quad (5.1)$$

называется разностная схема вида:

$$\begin{cases} \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + \Lambda \frac{y^{j+1} + y^j}{2} = 0, & x \in \omega_h, \quad t_j \in \omega_\tau; \\ y^0 = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $\Lambda$  — разностная аппроксимация оператора  $A$ .

Схема (5.2) является результатом попеременного применения явной и неявной схем, записанных, соответственно, для интервалов  $t^j \leq t \leq t^{j+\frac{1}{2}}$  и  $t^{j+\frac{1}{2}} \leq t \leq t^{j+1}$ , при условии, что  $A$  — линейный оператор, не зависящий от  $t$ :

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{0.5\tau} + \Lambda y^j = 0; \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} + \Lambda y^{j+1} = 0. \quad (5.3)$$

Исключая из системы уравнений (5.3) неизвестные  $y^{j+\frac{1}{2}}$ , приходим к схеме (5.2).

Пусть  $A = A(t)$  — положительно определенный оператор, и пусть он аппроксимируется разностным оператором  $\Lambda^j$ , таким что  $(\Lambda^j y, y) \geq 0$ :

$$\begin{cases} \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{y^{j+1} + y^j}{2} = 0, & x \in \omega_h, \quad t_j \in \omega_\tau; \\ y^0 = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h. \end{cases} \quad (5.4)$$

Схему (5.4) можно переписать в виде:

$$y^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right) y^j \Rightarrow y^{j+1} = T^j y^j, \quad (5.5)$$

где

$$T^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right).$$

Умножим уравнение (5.4) скалярно на выражение  $\frac{y^{j+1} + y^j}{2}$  и воспользуемся тем, что  $\Lambda^j$  — положительно определенный оператор:

$$\frac{(y^{j+1}, y^{j+1}) - (y^j, y^j)}{2\tau} + \underbrace{\left(\Lambda^j \frac{y^{j+1} + y^j}{2}, \frac{y^{j+1} + y^j}{2}\right)}_{\geq 0} = 0,$$

откуда получаем

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| \Leftrightarrow \|T^j\| \leq 1.$$

**Лемма 5.1** (Келлога) *Если  $A$  — самосопряженный положительно определенный оператор и  $\sigma$  — неотрицательное число, то*

$$\|(E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}\| \leq 1. \quad (5.6)$$

**Доказательство.** Обозначим  $T = (E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}$ , при этом получим:

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \max_{v \in H} \frac{((E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}v, (E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}v)}{(v, v)} = \\ &= \max_{w \in H} \frac{((E - \sigma A)w, (E - \sigma A)w)}{((E + \sigma A)w, (E + \sigma A)w)} = \max_{w \in H} \frac{(w, w) - 2\sigma(Aw, w) + \sigma^2(Aw, Aw)}{(w, w) + 2\sigma(Aw, w) + \sigma^2(Aw, Aw)} \leq 1. \end{aligned}$$



Если  $A > 0$  и  $\sigma > 0$ , то  $\|T\| < 1$ .

Введем операторы

$$Hu = \frac{\partial u}{\partial t} + Au$$

и

$$(H_\tau y)^j = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{y^{j+1} + y^j}{2},$$

а также норму:

$$\|H_\tau y\|_{C_\tau} = \max_{t_j \in \omega_\tau} \|(H_\tau y)^j\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в сеточном пространстве, которому принадлежит  $(H_\tau y)^j$ .

Разложим решение уравнения (5.1) в ряд Тейлора:

$$u^{j+1} = u^j + \tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^j + \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^j + O(\tau^3)$$

и учтем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A^2 u - A'_t u,$$

где  $A'_t = \frac{\partial A}{\partial t}$ . Следовательно,

$$u^{j+1} = u^j - \tau A^j u^j + \frac{\tau^2}{2} [(A^j)^2 u^j - (A'_t)^j u^j] + O(\tau^3).$$

Таким образом,

$$\|H_\tau y\|_{C_\tau} = \max_{t_j \in \omega_\tau} \|\Lambda^j y^j - A^j y^j + \frac{\tau}{2} [(A^j)^2 - (A'_t)^j - \Lambda^j A^j] y^j + O(\tau^2)\|.$$

Если в качестве аппроксимирующего оператора  $\Lambda^j$  выбрать  $\Lambda^j = A(t_j)$ , то

$$\|H_\tau y\|_{C_\tau} = \frac{\tau}{2} \max_{t_j \in \omega_\tau} \|(A'_t)^j y^j\| + O(\tau^2).$$

Если взять

$$\Lambda^j = A^j + \frac{\tau}{2} (A'_t)^j, \tag{5.7}$$

то

$$\|H_\tau y\|_{C_\tau} = O(\tau^2).$$

Аппроксимация схемой Кранка-Николсона будет иметь порядок  $O(\tau^2)$ , если оператор  $\Lambda^j$  выбрать в виде:

$$\Lambda^j = A(t_{j+\frac{1}{2}}) \tag{5.8}$$

или

$$\Lambda^j = \frac{1}{2} (A(t_{j+1}) + A(t_j)). \quad (5.9)$$

В различных приложениях, особенно при численном решении квазилинейных уравнений, используются аппроксимации (5.7), (5.8) и (5.9), обеспечивающие второй порядок аппроксимации по времени.